PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

a. Donner la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(\varepsilon_1) \qquad Ly' + Ry = 0$$

où L et R sont deux constantes strictement positives, la variable étant t.

b. $A \neq 0$ et α étant deux nombres réels donnés, trouver, dans le cas particulier où $\alpha \neq -\frac{R}{L}$ une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(\varepsilon_2) \qquad Ly' + Ry = A\, e^{\alpha t}$$

Si $\alpha = -\frac{R}{L}$, existe-t-il une constante réelle K telle que la fonction $y : t \to Kt\, e^{\alpha t}$ soit solution de (ε_2) ? Dans les deux cas, donner la solution générale de (ε_2) sur $\mathbb{R}$ ainsi que la solution particulière telle que $y(0) = 0$.

c. h étant un réel donné tel que $0 < h < \frac{R}{L}$, et f_h la fonction réelle définie par :

$$f_h(t) = \frac{1}{h} e^{-\frac{t}{h}}, \quad \forall\, t \geqslant 0$$

$$= 0 \qquad , \quad \forall\, t < 0,$$

démontrer qu'il existe une fonction y_h, définie et continue sur $\mathbb{R}$, dont la restriction à chacun des intervalles : $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ soit solution de l'équation différentielle $Ly' + Ry = f_h(t)$, et telle que $y_h(0) = 0$.

Vérifier son unicité.

d. g_h étant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_h(t) = \frac{1}{h}, \quad \forall\, t \in [0, h]$$

$$= 0, \quad \forall\, t \notin [0, h],$$

montrer de même qu'il existe une fonction Y_h et une seule ayant les propriétés suivantes :

Y_h est définie et continue sur $\mathbb{R}$;

Y_h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0, h\}$ et solution sur $\mathbb{R} - \{0, h\}$ de l'équation différentielle $Ly' + Ry = g_h(t)$.

e. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = \lim_{h \to 0} y_h(t)$ et $Y_0(t) = \lim_{h \to 0} Y_h(t)$.

f. φ étant une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^+$, à quelle condition doit satisfaire la fonction $t \to C(t)$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$, pour que la fonction :

$$t \to y(t) = C(t)\, e^{-\frac{R}{L}t}.$$

soit solution $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad Ly' + Ry = \varphi(t) \quad ?$$

g. Démontrer alors que l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$ qui vérifie la condition $y(0) = 0$ est définie par :

$$y(t) = \int_0^t \varphi(u)\, f(t-u)\, du,$$

où f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, ne dépendant pas de φ, et dont on donnera la valeur $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On rapprochera la fonction f des fonctions y_0 et Y_0 définies au I.*e.*

II

a. φ étant une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, et g_h la fonction définie au I.*d.*, calculer :

$$\lim_{h \to 0} \int_0^\infty g_h(t)\, \varphi(t)\, dt. \qquad \ldots/\ldots$$

Concours des E.N.S.I. Programme M 1978

M 81

b. A tout $n \in \mathbb{N}$, on associe l'intégrale impropre :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt .$$

Étudier sa convergence.

Calculer I_0, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la différence : $In - n\, I_{n-1}$.

En déduire la valeur de I_n pout tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On suppose, dans la suite de cette partie II, que la fonction φ, continue sur $[0, +\infty[$, est telle qu'il existe trois nombres, $n \in \mathbb{N}^*$, $A > 0$ et $K > 0$ tels que $u \geqslant A \Rightarrow |\varphi(u)| \leqslant K u^n$.

Étudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_{\frac{A}{h}}^{+\infty} e^{-t} \varphi(ht)\, dt ,$$

et calculer, le cas échéant, la limite de cette intégrale lorsque h tend vers 0.

En déduire la limite, lorsque h tend vers 0, de l'intégrale :

$$\int_A^{+\infty} f_h(u) [\varphi(u) - \varphi(0)]\, du ,$$

où f_h est la fonction définie au I.*c.*

d. Calculer, pour tout $\alpha \in]0, A[$, la limite lorsque h tend vers 0 de l'intégrale :

$$\int_\alpha^A f_h(u) [\varphi(u) - \varphi(0)]\, du .$$

e. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall h > 0, \quad \left| \int_0^\alpha f_h(u) [\varphi(u) - \varphi(0)]\, du \right| \leqslant \varepsilon .$$

Calculer alors la limite lorsque h tend vers 0 de

$$\int_0^{+\infty} f_h(u)\, \varphi(u)\, du .$$

f. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $\lim_{h \to 0} f_h(t)$ et $\lim_{h \to 0} g_h(t)$.

Si l'on pose : $\lim_{h \to 0} g_h(t) = \delta(t)$, est-il légitime d'écrire :

$$\lim_{h \to 0} \int_0^{+\infty} g_h(t)\, \varphi(t)\, dt = \lim_{h \to 0} \int_0^{+\infty} f_h(t)\, \varphi(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \delta(t)\, \varphi(t)\, dt \ ?$$

III

C^+ étant l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$, on désigne par E_1 l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n > 0 \text{ et } K_n > 0 \ / \ (\forall t \geqslant A_n, |\varphi(t)| \leqslant K_n t^n) .$$

E_2 est l'ensemble des fonctions $f \in C^+$ telles que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists \gamma_m > 0 \ / \ \left(\forall t \in \mathbb{R}^+, \ |f(t)| \leqslant \frac{\gamma_m}{t^m}\right).$$

a. E_1 et E_2 sont-ils deux sous-espaces vectoriels de C^+ ?

b. L'application δ de E_1 dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ est-elle une forme linéaire sur E_1 ?

c. f étant une fonction appartenant à E_2, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f(u)\, \varphi(u)\, du$$

est-elle convergente quelle que soit la fonction $\varphi \in E_1$?

L'application $\hat{f}$ de E_1 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\hat{f}(\varphi) = \int_0^{+\infty} f(u)\, \varphi(u)\, du$$

est-elle une forme linéaire sur E_1 ?

d. Dans l'espace E_1^* dual de E_1, on dit qu'une suite $\{F_n\}$ converge vers $F \in E_1^*$ si l'on a :

$$\forall \varphi \in E_1, \quad \lim_{n \to \infty} F_n(\varphi) = F(\varphi) .$$

On dit de même qu'une famille $\{F_h\}_{h \in J}$ d'éléments de E_1^*, paramétrée sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, a pour limite F au point $h_0 \in J$ si l'on a :

$$\forall \varphi\, E_1, \quad \lim_{h \to h_0} F_h(\varphi) = F(\varphi) .$$

$\{f_h\}$ étant la famille des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_h(t) = \frac{1}{h} e^{-\frac{t}{h}}$.

Démontrer que $\lim_{h \to 0} \hat{f}_h = \delta$, où δ est l'application définie au III. *b.*

e. Le sous-ensemble E_{01} de E_1 constitué par les fonctions qui ont pour valeur 0 au point O est-il un sous-espace vectoriel de E_1 ?

. . . / . . .

f. φ étant une fonction appartenant à E_{01} et t un réel positif donné, on désigne par φ_t la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi_t(u) = \varphi(t-u), \quad \forall u \in [0, t]$$
$$= 0 \quad , \quad \forall u > t$$

φ_t appartient-elle à E_1 quel que soit t ?

g. A toute forme linéaire F sur E_1, et à tout $t \geqslant 0$, on associe l'application F_t de E_{01} dans $\mathbb{R}$ définie par $F_t(\varphi) = F(\varphi_t)$. Cette application est-elle une forme linéaire sur E_{01} ?

Que peut-on dire de F_0 ?

Donner pour toute fonction $\varphi \in E_{01}$, la valeur de $\delta_t(\varphi)$ quel que soit $t \geqslant 0$.

IV

E'_1 est l'ensemble des fonctions $\varphi \in E_1$ qui sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et dont la dérivée $\varphi' \in E_1$; de même, E'_2 est l'ensemble des fonctions $f \in E_2$ continûment dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et telles que $f' \in E_2$.

a. F étant une forme linéaire sur E_1, l'application F′ de E'_1 dans $\mathbb{R}$ définie par $F'(\varphi) = -F(\varphi')$ est-elle une forme linéaire sur E'_1 ?

b. A quelle condition doit satisfaire la fonction $f \in E'_2$ pour que l'on ait : $\widehat{f'} = \widehat{f}'$?

Démontrer que l'on a, dans le cas général :

$$\widehat{f'} = \widehat{f}' + f(0)\,\delta,$$

et que cette égalité permet d'étendre à E_1 tout entier la définition de $\widehat{f}$ qui était, jusqu'ici, restreinte à E'_1.

c. U étant la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $U(t) = 1$, calculer $\widehat{U}'$.

d. z désignant la solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle : $Lz' + Rz = 0$, telle que $z(0) = \frac{1}{L}$.

Vérifier que $z \in E'_2$ et que :

$$L\widehat{z}' + R\widehat{z} = \delta.$$

e. φ étant une fonction appartenant à E_{01}, on pose, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\widehat{z}_t(\varphi) = y(t)$$

Vérifier que la fonction y ainsi définie est dérivable, et que

$$y'(t) = \widehat{z}'_t(\varphi).$$

En déduire une méthode permettant, lorsqu'on connaît la fonction $z \in E'_2$ telle que $L\widehat{z}' + R\widehat{z} = \delta$, de construire la fonction y solution de l'équation :

$$Ly' + Ry = \varphi(t)$$

telle que $y(0) = 0$.

Ce texte est truffé de fautes (non corrigées), parmi lesquelles:

I d. ajouter $Y_h(0) = 0$

I f. ajouter φ continue (utile pour g.)

III 1ère ligne: $\mathbb{R}^+$ au lieu de $\mathbb{R}$

3ème ligne: $\exists n$ au lieu de $\forall n$

b. Lire $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^+$

IV b. $\widehat{f'}$ et $\widehat{f}'$ ne sont pas définies sur le même ensemble.

c. $U \notin E'_2$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail